Décomposition polaire.

Théorème : L'application $\mu : \mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}) \longrightarrow GL_n(\mathbb{R})$ est un homéomorphisme.
$$(O, S) \longmapsto OS$$

Preuve :

μ est bien définie : Soit $(O,S) \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, on a $\det(OS) = \det(O)\det(S) = \pm \underbrace{\det(S)}_{>0} \neq 0$.

μ est continue car le produit matriciel est polynomiale en les coefficients des matrices.

<u>Montrons que μ est surjective</u> : Soit $M \in GL_n(\mathbb{R})$. La matrice ${}^tMM \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, en effet, soit $X \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. On a alors ${}^tX\,{}^tMMX = {}^t(MX)(MX) = \|MX\|^2 > 0$ car $X \neq \{0\}$

On peut donc, d'après le Théorème Spectral, diagonaliser ${}^tMM$ dans une base orthonormée.
$\exists P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ tel que ${}^tMM = P\begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}P^{-1}$ où $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $\lambda_i > 0$.

On pose alors $S = P\begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \sqrt{\lambda_n} \end{pmatrix}P^{-1}$, S est symétrique car $P^{-1} = {}^tP$ et est définie positive car ses valeurs propres sont strictement positives.

On sait que $S^2 = {}^tMM$ et en posant $O = MS^{-1}$ on a :
${}^tOO = {}^t(MS^{-1})(MS^{-1}) = {}^tS^{-1}\,{}^tMMS^{-1} = S^{-1}S^2S^{-1} = I_n$. Donc $O \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et $M = OS$.

Donc μ est surjective.

<u>Montrons que μ est injective</u> : Supposons que l'on ait : $M = OS = O'S'$ où $O, O' \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$, $S, S' \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$

Alors, il vient : $S^2 = {}^tMM = {}^t(O'S')(O'S') = {}^tS'\,{}^tO'O'S' = S'^2$

Soit Q un polynôme interpolateur de Lagrange tel que $Q(\lambda_i) = \sqrt{\lambda_i}$ $\forall i \in [\![1,n]\!]$

On a alors $S = P\begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \sqrt{\lambda_n} \end{pmatrix}P^{-1} = PQ\begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}P^{-1} = Q\left(P\begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}P^{-1}\right) = Q(S^2) = Q(S'^2)$

Or S' commute avec S'^2 donc avec $Q(S'^2) = S$. Donc S' et S commutent et sont toutes les 2 diagonalisables, elles le sont donc dans une même base. Ainsi, $\exists P_0 \in GL_n(\mathbb{R})$ telle que :
$S' = P_0\begin{pmatrix} \mu_1' & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \mu_n' \end{pmatrix}P_0^{-1}$ et $S = P_0\begin{pmatrix} \mu_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \mu_n \end{pmatrix}P_0^{-1}$. Or $S^2 = S'^2$ donc $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $\mu_i^2 = \mu_i'^2$

or $\mu_i > 0$, $\mu_i' > 0$ donc $\mu_i = \mu_i'$ et $S = S'$ et on a $O'S = OS \Rightarrow O' = O$

Donc μ est injective.

Montrons que μ^{-1} est continue : Soit (M_p) une suite de $GL_n(\mathbb{R})$, $M_p \xrightarrow[p\to+\infty]{} M \in GL_n(\mathbb{R})$

On note $\forall p \in \mathbb{N}$, $(O_p, S_p) = \mu^{-1}(M_p)$ de sorte que $O_p S_p = M_p$ et $\mu^{-1}(M) = (O,S) \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$

Montrons que $O_p \to O$ et $S_p \to S$:

On sait que $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ est compact (*) : Donc (O_p) possède une ss-suite convergente.

(**) Soit $\bar{O}$ une valeur d'adhérence de $(O_p)_{p\in\mathbb{N}}$ ($O_{p_k} \xrightarrow[k\to+\infty]{} \bar{O}$). Alors la sous-suite (S_{p_k}) converge vers $\bar{O}^{-1}M$ matrice symétrique définie positive car

$$\bar{S} := \bar{O}^{-1}M \in GL_n(\mathbb{R}) \cap \overline{\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})} = GL_n(\mathbb{R}) \cap \mathcal{S}_n^{+}(\mathbb{R}) = \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}) \quad (☆)$$

On a donc par injectivité de μ : $M = \bar{O}\bar{S}$ et $\bar{O} = O$ et $\bar{S} = S$.

Donc $\mu^{-1}(M_p) \xrightarrow[p\to+\infty]{} \mu^{-1}(M)$

Donc μ^{-1} est continue.

(*) Montrons que $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ est fermé borné :

$\Psi : M \mapsto {}^tMM$ est continue et $\mathcal{O}_n(\mathbb{R}) = \Psi^{-1}(I_n)$ c'est l'image réciproque d'un fermé par Ψ continue

Donc $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ est fermé.

$\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ est borné car $\forall A \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$, $|a_{i,j}| \leq 1 \Rightarrow \|A\|_\infty \leq 1$ Donc $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ est bornée.

(**) Dans un compact, une suite (x_n) qui possède une unique valeur d'adhérence converge vers celle-ci.

Par l'absurde, on suppose que (x_n) ne cvg pas dans K donc $\exists \varepsilon > 0, \forall N \in \mathbb{N}, \exists n \geq N, d(x_n, l) \geq \varepsilon$.

Donc $\exists \varepsilon > 0, \forall N \in \mathbb{N}, \exists n \geq N, d(x_{\varphi(n)}, l) \geq \varepsilon$. Par compacité, $(x_{\varphi(n)})$ admet une valeur d'adhérence et par unicité, c'est l, on aboutit à une contradiction.

(☆) $\overline{\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})} = \mathcal{S}_n^{+}(\mathbb{R})$

Soit $S \in \mathcal{S}_n^{+}(\mathbb{R})$, $\quad S + \frac{1}{p} I_n \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}) \xrightarrow[p\to+\infty]{} S \in \mathcal{S}_n^{+}(\mathbb{R}) \Rightarrow \mathcal{S}_n^{+}(\mathbb{R}) \subset \overline{\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})}$

Soit $(S_p) \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})^{\mathbb{N}}$

Par le Thm Spectral, $S_p = O_p \begin{pmatrix} \lambda_{1,p} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_{n,p} \end{pmatrix} O_p^{-1}$ $\lambda_{i,p} > 0$.

$\rho(S_p) = \max_{i \in [\![1,n]\!]} |\lambda_{i,p}| \in \mathbb{R}_+^*$ or $\overline{\mathbb{R}_+^*} = \mathbb{R}_+$

D'où $\lim S_p = S \in \mathcal{S}_n^{+}(\mathbb{R})$